＜講座紹介·お申込みはシグマインベストメントスクールHPにて＞
http://www.sigmabase.co.jp/correspondence/course_top2/ni2.htm

（３） オプション価格を計算してみましょう

オプション価格を計算してみましょう。そして実際に日経平均（先物）が動いた場合やボラティリティが変化した場合、どのようにオプション価格が変化するかを見ていきます。これはトレーディングやリスク管理上、最も大事なことです。

まずオプションの価格式ですが以下のとおりです。

$$C = e^{-r(T-t)}\left\{F \cdot \mathrm{N}(d1) - K \cdot \mathrm{N}(d2)\right\}$$
$$P = e^{-r(T-t)}\left\{K \cdot \mathrm{N}(-d2) - F \cdot \mathrm{N}(-d1)\right\}$$
$$d1 = \frac{\ln\left(F/K\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2},\ d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

各記号は既に紹介してあるのもありますが以下のとおりです。

- C ：コール・オプション・プレミアム
- P ：プット・オプション・プレミアム
- F ：先物価格
- K ：行使価格
- $T-t$ ：1 年を 1 としたオプション満期までの期間（例えば 3 ヶ月なら 0.25 です）
- r ：満期までの安全な金利（連続で複利計算する場合の金利）
- e ：ネピアの数（2.718…）。連続複利の計算をする時に使います。
- $\mathrm{N}(\cdot)$ ：**標準正規分布**の分布関数で特に $\mathrm{N}(d2)$ は「満期時点の日経平均が行使価格 K より大きくなる確率」を計算しています。
- σ ：ボラティリティ

ちなみに標準正規分布という分布は、平均が 0、分散（及び標準偏差）が 1 の正規分布のことです。正規分布にはとても面白い性質がたくさんあって、例えばある確率変数 x が平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従う場合、 $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ と変換すると、 z は平均 0、分散 1 の標準正規分布に従うことになります[3]。このことを利用して、オプション価格も「対数正規分布 ⇒ 正規分布 ⇒ 標準正規分布」の形まで降りてきて、エクセルなど表計算ソフトの関数を使って簡単に計算できるようになっています。

数学が少し多くなっているので、なんだか難しい式が多く嫌だなと感じるかもしれませんが、怖がることはありません。理屈は皆さんが既に理解したとおりで、（たとえ正規分布が良くわからないとし

[3] このことを**標準化**といいます。この性質から、正規分布は全て標準正規分布に直して分布の計算ができるのです。

＜講座紹介･お申込みはシグマインベストメントスクールHPにて＞
http://www.sigmabase.co.jp/correspondence/course_top2/ni2.htm

ても） $\ln(\frac{\text{SQ値}}{F_0})$ が年率の標準偏差 σ （これがボラティリティ）によって、$T-t$ までの期間は平均が 0 で $\sigma\sqrt{T-t}$ という標準偏差（分散は $\sigma^2(T-t)$）の正規分布をするという仮定[4]での $\mathrm{Max}(\text{SQ値}-K,\ 0)$ の期待値を計算して、金利分の割引をしたものがコールである C で、$\mathrm{Max}(\text{SQ値}-K,\ 0)$ として同様の計算したものがプットである P の値です。はじめに掛かっている $e^{-r(T-t)}$ は金利分の割引です。理屈さえしっかりわかれば、エクセルなどの表計算ソフトで計算できます。

図 1-9 オプション計算式（満期まで 60 日、行使価格 13,500 円、先物 14,000 円）

		数式及びその説明
F：先物価格	14,000	
K：行使価格	13,500	
満期までの日数(T-t)	60	
T-t：年単位	0.16438	=B4/365
r ：安全な金利	0.100%	連続複利
割引：exp(r*(T-t))	0.999836	=EXP(-B6*B5)
σ：ボラティリティー	24.00%	
d1	0.4224	=(LN(B2/B3)+(B8^2/2)　*B5)/(B8*B5^0.5)
d2	0.3251	=B9-B8*B5^0.5
N(d1)	0.6636	=NORMSDIST(B9)
N(d2)	0.6274	=NORMSDIST(B10)
C：コール	820	=B7*(B2*B11-B3*B12)
P：プット	320	=B7*(B3*(1-B12)-B2*(1-B11))

EXCEL 参照　N225OPTION_intermediate1.xlsx　＞　ワークシート：Black76

上図は、エクセルにより満期までの期間が 60 日、行使価格 13,500 円のコールとプットを先物価格が 14,000 円の時に計算したものです。ボラティリティ 24％でコールが 820 円、プットが 320 円と計算されています。

一番右の列には実際にエクセルに入れてある計算式が入っているので、これを使えばオプションの計算ができますし、先物価格やボラティリティを変化させることによってオプション価格の変化も見ることができます。

---

[4] この仮定から先ほどの標準化をすると、$\frac{\ln(\text{SQ値}/F_0)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ は標準正規分布に従います。

＜講座紹介･お申込みはシグマインベストメントスクールHPにて＞
http://www.sigmabase.co.jp/correspondence/course_top2/ni2.htm

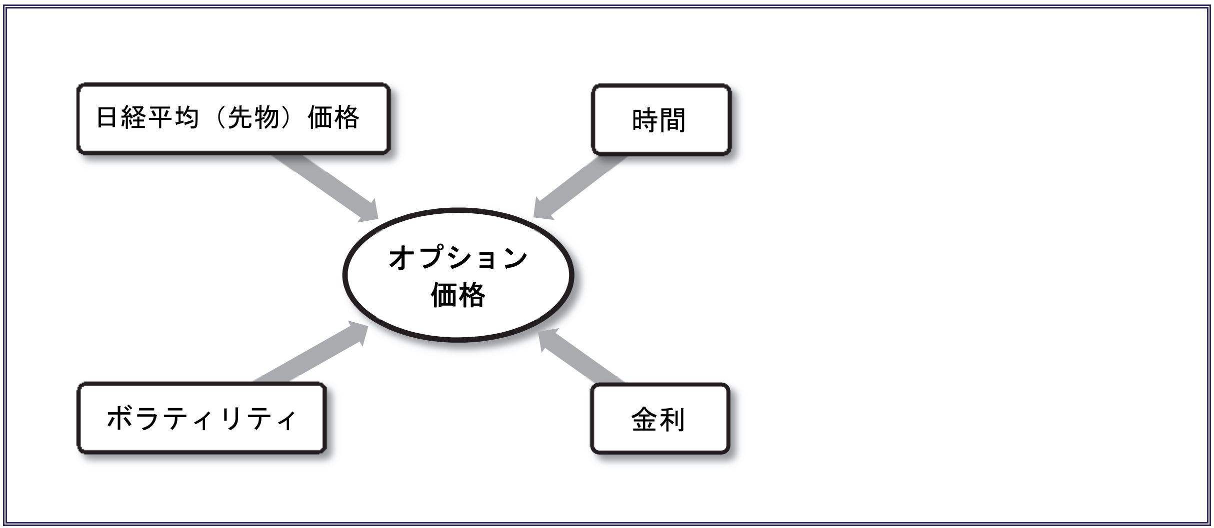
第２章　リスク管理の基礎

１．　プレミアムと感応度

本章では、リスク管理を行うために欠かせない感応度（Greeks、グリークスとも呼ばれます）について、基本的なことを学びます。オプションの価格決定要因については既に学んでいますので、価格変動要因がある程度わかっていてどのようにリスクを管理していくか、単純にいえば「どのようにオプション取引から利益を得て、損失を小さくするか？」ということを勉強します。

行使価格が決まっているオプション価格は、日経平均（先物）株価、ボラティリティ、時間そして（ほとんど影響はないですが）金利という要因の変化でプレミアムが変化します。

図 2-1　オプション価格とその決定要因



市場では、これらは互いにある程度関連しながら変化しているため、プレミアム自体は複雑に変化します。、そこで４つの要因の影響をいっぺんに考えることはとても難しいので、それぞれの要因の影響を１つずつ見ていくことがリスク管理上の有効な手段となります。

（1）　日経平均先物価格（日経平均現物）とプレミアムの関係１（デルタ）

まずは非常に重要な先物とプレミアムの関係を見ていきましょう。十分わかっていると思いますが、先物価格が上昇すると通常コールは上昇しプットは下落します。この関係を実際のオプションの式によって確かめたのが以下の表です。

<講座紹介･お申込みはシグマインベストメントスクールHPにて>
http://www.sigmabase.co.jp/correspondence/course_top2/ni2.htm

表 2-1 プレミアムの変化（満期まで 60 日、行使価格 14,000 円、ボラティリティ 23.4%）

先物F	コールC	プットP
12,000	27	2,027
12,200	41	1,840
12,400	59	1,659
12,600	85	1,484
12,800	117	1,317
13,000	159	1,159
13,200	210	1,010
13,400	273	872
13,600	346	746
13,800	432	632
14,000	530	530
14,200	639	439
14,400	761	361
14,600	893	293
14,800	1,035	236
15,000	1,187	187
15,200	1,347	148
15,400	1,515	115
15,600	1,688	89
15,800	1,867	68
16,000	2,051	51

EXCEL 参照　N225OPTION_intermediate1.xlsx　>　ワークシート：Black76_Delta

この表は、満期まで 60 日間、行使価格 14,000 円のコール・オプションとプット・オプションのプレミアムが、左に表示された日経平均先物に沿ってどのように変化するか見たものです。ボラティリティは 23.4%で計算しています。

まず注目して欲しいのは日経平均先物が 14,000 円のところです。どちらも 530 円になっています。これは、日経平均先物が 14,000 円の時の行使価格 14,000 円のコールとプットの価格です。

今まで勉強してきたことの復習ですが、今回使っている Black 76 というプレミアム計算式の前提は、オプションと同じ満期を持つ先物が「現時点での価格（先物価格です）を中心に対数正規分布をする」という考え方に基づいています。そして、満期、つまり SQ 値の期待値は現在の先物価格と考えられるので、ちょうど行使価格が先物価格と同じになっている場合はコールもプットも同じ価格になります。

そして、表では 200 円ずつ日経平均先物を変化させていますが、先物が上昇していくとコールの価格は上昇、プットの価格は下落し、先物価格が下落していくとコールの価格は下落、プットの価格は上昇していきます。つまり、日経平均のオプションは、**コールを買っている場合には先物を買っている場合と同じような損益の動きをして、プットを買っている場合には先物を売っている場合と同じような動きをする**わけです。

この性質を利用すれば、コールの買い（売り）を行っている場合、先物の売り（買い）を組み合わ

＜講座紹介･お申込みはシグマインベストメントスクールHPにて＞
http://www.sigmabase.co.jp/correspondence/course_top2/ni2.htm

せれば損益の動きを小さくすることができそうです。同様に、プットの買い（売り）には先物の買い（売り）を組み合わせることで損益の動きを小さくすることができそうだと考えられます。この考え方にそって損益の動きを安定的にしようとするのが、「デルタヘッジ」という考え方です。

i. デルタ（Δ）とデルタヘッジの考え方

例えば先物価格が 14,000 円の時にコール・オプションを 530 円で買ったとします。コール・オプションを買っているのだから、「日経平均先物は上昇する」と考えているのかもしれません。

例えば「日経平均先物が上昇することには、かなり自信があるが、今すぐではなく、いつか大きく上昇する」と考えているとします。

その場合、ちょっとあてが外れて日経平均先物が下落するとコール・オプションは下がってしまいます。当然、オプションの買い手であるあなたは（含み）損失を抱えることになります。そこで、「今すぐ上昇はしないだろうから、ちょっと日経平均先物が下落するリスクをヘッジしておきたい」と考えて表を見てみましょう。

日経平均株価が 14,000 円の時のコール・オプションは 530 円ですが、その日経平均先物が 13,800 円になった場合のコール・オプションは 530 円のすぐ上を見れば良いので 432 円となり、98 円の差があります。1 単位買っているだけで 98,000 円の損失です。

日経平均先物が－200 円動いてコール・オプションは－98 円動いたわけですから、原資産である日経平均先物の動きに対するコール・オプションの価格変化は、

$$\frac{\text{コール・オプションの値動き}}{\text{日経平均先物の値動き}} = \frac{-98}{-200} = 0.49$$

と考えることができます。

この式は、日経平均先物の動きに対するコール・オプションの価格変化の割合を考えるもので、200 円売られるという日経平均先物の動きに対し、オプションはその 0.49 倍の動きをしたということです。これは、コール・オプションを買う際に、その単位数の 0.49 倍の先物を売っておけば、トータルの損益は変化しないということを意味します。つまり、オプションで損する部分を先物の売りで相殺するわけです。以上の考えがデルタヘッジという考え方です。

＜講座紹介･お申込みはシグマインベストメントスクールHPにて＞
http://www.sigmabase.co.jp/correspondence/course_top2/ni2.htm

＜例題 2-1＞実際のデルタヘッジシミュレーション

さて、表 2-1 において日経平均先物が 14,000 円です。あなたは、

① 行使価格 14,000 円のコール・オプションを 1 枚買っています。この時、先物が 200 円下落する場合のリスクをヘッジすることを考えてください。シミュレーションですから、ヘッジするための先物の枚数は小数になっても構いませんので、最適と思えるヘッジ方法を考えてみてください。そして、400 円下落した場合にそのヘッジが有効かどうか検証してください。

② 行使価格 14,000 円のプット・オプションを購入した場合、先物が 200 円上昇するリスクのヘッジ方法はどうなるでしょうか。また、400 円上昇した場合も検証してください。

＜解答 2-1 ①＞

先ほどの考え方に沿えば､既に先物が 200 円下落した場合には 98 円下落するということが検証済みなので、正にさっきの計算と同じになります。

$$\frac{\text{コール・オプションの値動き}}{\text{日経平均先物の値動き}} = \frac{-98}{-200} = 0.49$$

このとおり 0.49 単位先物を売れば良いと考えられます｡実際に先物を 14,000 円で 0.49 単位売っていると仮定しましょう。200 円先物が下がった場合、コール・オプションは 432 円になっているわけですから、損失は以下のとおり計算できます。

$$\text{コールオプションの損失額} = (432 - 530) \times 1000 = -98000$$

これに対し、先物 0.49 枚によるヘッジの利益は以下のとおりです。

$$\text{先物の利益額} = (14000 - 13800) \times 0.49 \times 1000 = +98000$$

どうですか、ぴったり 98,000 円になるのでしっかりとヘッジされています。

さて、先物が 400 円下がった場合はどうでしょうか？

表 2-1 によれば、コール・オプションは 346 円になりますから、以下のとおり計算できます。

$$\text{コールオプションの損失額} = (346 - 530) \times 1000 = -184000$$

結構大きい損失ですね。では、先物の売りによる利益はどうでしょう。

$$\text{先物の利益額} = (14000 - 13600) \times 0.49 \times 1000 = +196000$$

<講座紹介･お申込みはシグマインベストメントスクールHPにて>
http://www.sigmabase.co.jp/correspondence/course_top2/ni2.htm

当然、200 円の時の 2 倍になっています。つまり 400 円下落すると、ヘッジ取引の利益の方がオプションの損失より大きくなります。これは、先物取引は先物の動きに対して「線形」に損益が出てくるのに対し、オプションは先物に対して線形に動いてくれないことに因ります（つまりこの場合でいえば 200 円の動きの 2 倍の価格変化にはならないということ）。この性質を非線形といいますが、これがオプション取引を難しくしている性質の一つであり、面白さでもあります。今回の例では、少なくとも損失は出さないで済みました。

＜補足＞

先物が 200 円上がった場合はどうでしょう。計算は難しくないので、以下のとおりまとめておきます。

表　2‐1 によれば先物価格が 14,200 円の時のコール･オプションは 639 円ですから､利益は 109,000 円になります。それに対し、先物 0.49 枚の損失は–98,000 円ですから、ほんの少しですが 11,000 円利益が出ています。このように 200 円程度で区切って先物のヘッジの割合を出しても、正確に上下で 0 にすることは難しいといえます。このことは少しあとで更に深く勉強します。

＜解答 2-1　②＞

コール・オプションと同様に考えると、行使価格 14,000 円のプットのプレミアムは、先物価格が 14,000 円の時は 530 円、14,200 円の時は 439 円、14,400 円の時は 361 円になっていますから、先物が 200 円上昇した場合のヘッジとしては、以下のとおり計算できます。

$$\frac{\text{プット・オプションの値動き}}{\text{日経平均先物の値動き}} = \frac{439-530}{14200-14000} = -0.455$$

これは、行使価格 14,000 円のプット買いをしていることは、先物を 0.455 枚売っていることと同じような状況と考えることができます。よって、ヘッジのためには 0.455 枚、14,000 円で先物を購入すれば良いでしょう。

では、実際に先物が 14,200 円になった場合はどうでしょうか？
上記の式の分子の 1,000 倍が損失のはずですから、プット・オプション購入による損失は–91,000 円です。それに対し、先物を 0.455 枚買っている時の利益は以下のとおりとなります。

$$\text{先物の利益額} = (14200-14000)\times 0.455\times 1000 = +91000$$

やはり 91,000 円です。計算式をみれば当然ですが、ヘッジは有効に働きます。

＜講座紹介･お申込みはシグマインベストメントスクールHPにて＞
http://www.sigmabase.co.jp/correspondence/course_top2/ni2.htm

ii.　ボラティリティの感応度ベガ（Vega）

ボラティリティに対するプレミアムの変化がほぼ直線的であるため、ボラティリティに関するリスクは比較的簡単、かつ正確に測ることができます（ただし、リスク管理が簡単というわけではありません）。

オプション・プレミアムのボラティリティに関する感応度をベガ（Vega）といいます。考え方は以下のとおりです。

$$\text{ベガ} = \frac{\text{プレミアムの変化}}{\text{ボラティリティの変化}}$$

数式もボラティリティ（σ）で偏微分するため、$Vega = \dfrac{\partial C}{\partial \sigma} = \dfrac{\partial P}{\partial \sigma}$ となります。コールとプットのベガはガンマ同様、同じ値になります。

ただし、ボラティリティの場合、通常%で表され、動き方も大きく動いて 2%程度です。ところが、この偏微分を行って計算されるベガは、ボラティリティが 1（100%）変化した場合の数値となるため、ボラティリティと比べて大きすぎる値となってしまいます。よって、通常リスク管理に使う場合は 1%ベガとして、偏微分より計算したベガの 100 分の 1 の数字を使います。

下図では、その 1%ベガを計算させています。

図 2-11　オプション計算式とグリークス（満期まで 60 日、行使価格 13,500 円、先物 14,000 円）

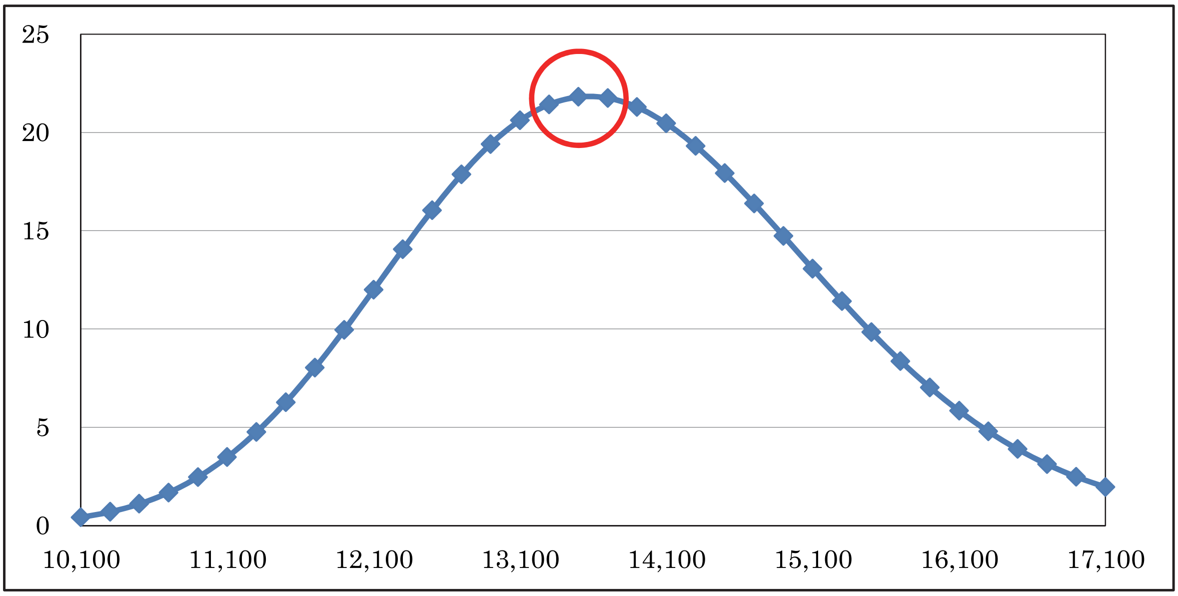
		数式及びその説明
F：先物価格	14,000	
K：行使価格	13,500	
満期までの日数(T-t)	60	
T-t：年単位	0.16438	=B4/365
r ：安全な金利	0.100%	連続複利
割引：exp(r*(T-t))	0.999836	=EXP(-B6*B5)
σ：ボラティリティー	25.90%	
d1	0.3988	=(LN(B2/B3)+(B8^2/2)　*B5)/(B8*B5^0.5)
d2	0.2938	=B9-B8*B5^0.5
N(d1)	0.6550	=NORMSDIST(B9)
N(d2)	0.6156	=NORMSDIST(B10)
C：コール	860	=B7*(B2*B11-B3*B12)
P：プット	360	=B7*(B3*(1-B12)-B2*(1-B11))
コール･デルタ ΔC	0.6549	=EXP(-B6*B5)*B11
プット･デルタ ΔP	-0.3450	=EXP(-B6*B5)*(B11-1)
ガンマ Γ	0.0003	=+EXP(-B6*B5)*EXP(-0.5*B9^2)/SQRT(2*PI())/B2/B8/SQRT(B5)
ベガ Vega (/%)	20.91	=+B7*B2*EXP(-0.5*B9^2)/SQRT(2*PI())*SQRT(B5)/100

EXCEL 参照　N225OPTION_intermediate1.xlsx　＞　ワークシート：Black76_Vega

＜講座紹介･お申込みはシグマインベストメントスクールHPにて＞
http://www.sigmabase.co.jp/correspondence/course_top2/ni2.htm

では、先物価格が変化した場合にベガがどのように変化するか見てみましょう。

図 2-12　先物の変化に対する Vega の変化



上図はエクセルのワークシートにもある、行使価格 13,500 円、満期まで 60 日間のオプションについてボラティリティを 25.9%として、日経平均先物価格が変化した場合のベガの値をプロットしたものです。

先ほど、オプション価格は「**ボラティリティに対してほぼ線形に変化する**」といいましたが、日経平均先物価格を動かすとベガの値は変化してしまいます。

丸印で囲んだところは ATM（日経平均先物が 13,500 円近辺）です。ボラティリティの感応度であるベガは日経平均先物価格が動けば変化するわけで、先物が ATM 近辺にあるとベガが最も大きい、つまりボラティティに関する感応度が最も大きくなります。

この性質はリスク管理上、大事で、後ほど実務的なリスク管理を学ぶ際に重要になってきます。

＜講座紹介･お申込みはシグマインベストメントスクールHPにて＞
http://www.sigmabase.co.jp/correspondence/course_top2/ni2.htm

表 2-8 リバース･カレンダー･スプレッドとグリークス

先物価格	デルタ	ポートガンマ	ポートベガ	ポートセータ	P/L
	0.052	**0.00016**	**−8.52**	**−3.83**	**0**
13,000	−0.082	−0.00010	−6.64	1.17	125,582
13,100	−0.091	−0.00009	−7.23	1.08	116,939
13,200	−0.100	−0.00008	−7.76	0.93	107,388
13,300	−0.107	−0.00007	−8.20	0.69	97,019
13,400	−0.113	−0.00005	−8.55	0.36	85,971
13,500	−0.117	−0.00003	−8.80	−0.05	74,433
13,600	−0.118	0.00000	−8.93	−0.53	62,636
13,700	−0.117	0.00003	−8.97	−1.08	50,855
13,800	−0.112	0.00006	−8.92	−1.66	39,389
13,900	−0.104	0.00009	−8.81	−2.25	28,553
14,000	−0.093	0.00012	−8.65	−2.83	18,661
14,100	−0.079	0.00015	−8.48	−3.35	10,010
14,200	−0.063	0.00017	−8.32	−3.80	2,861
14,300	−0.045	0.00019	−8.19	−4.14	−2,571
14,400	−0.026	0.00020	−8.12	−4.36	−6,134
14,500	−0.006	0.00020	−8.11	−4.44	−7,740
14,600	0.013	0.00019	−8.18	−4.39	−7,377
14,700	0.032	0.00018	−8.30	−4.21	−5,096
14,800	0.049	0.00016	−8.48	−3.90	−1,017
14,900	0.064	0.00014	−8.69	−3.50	4,687
15,000	0.077	0.00012	−8.92	−3.02	11,801
15,100	0.088	0.00009	−9.13	−2.49	20,080
15,200	0.095	0.00006	−9.32	−1.94	29,260
15,300	0.100	0.00004	−9.45	−1.39	39,077
15,400	0.103	0.00001	−9.52	−0.86	49,275
15,500	0.103	−0.00001	−9.51	−0.38	59,616
15,600	0.102	−0.00003	−9.41	0.06	69,886
15,700	0.098	−0.00004	−9.23	0.43	79,905
15,800	0.094	−0.00005	−8.97	0.73	89,523
15,900	0.088	−0.00006	−8.63	0.96	98,625
16,000	0.082	−0.00007	−8.23	1.14	107,127
16,100	0.075	−0.00007	−7.77	1.25	114,976
16,200	0.068	−0.00007	−7.28	1.31	122,143
16,300	0.061	−0.00007	−6.75	1.33	128,624
16,400	0.055	−0.00006	−6.22	1.31	134,432
16,500	0.048	−0.00006	−5.68	1.27	139,591

EXCEL 参照　N225OPTION_intermediate2.xlsx　>　ワークシート：Calendar

各リスク（グリークス）について考察してみましょう。

＜講座紹介･お申込みはシグマインベストメントスクールHPにて＞
http://www.sigmabase.co.jp/correspondence/course_top2/ni2.htm

i.　デルタ

日経平均先物価格が上下してもデルタは大きくは動きませんが、上昇した場合は 15,500 円近辺でピークの+0.103、下落した場合は 13,600 円がボトムの−0.118 とリスクが出ています。この理由を考えてみましょう。行使価格は同じ 14,500 円のプットで、買っているオプションは残存期間が短く 15 日、売っているオプションは 43 日です。ボラティリティはそれぞれ 25.6%と 24.1%で、残存期間が長い 11 月限のオプションの方が 1.5%ボラティリティが低いことがわかります。

ここで、オプションの式を再掲します。

$$C = e^{-r(T-t)}\left\{F \cdot \mathrm{N}(d1) - K \cdot \mathrm{N}(d2)\right\}$$
$$P = e^{-r(T-t)}\left\{K \cdot \mathrm{N}(-d2) - F \cdot \mathrm{N}(-d1)\right\}$$
$$d1 = \frac{\ln\left(F/K\right)}{\underline{\sigma\sqrt{T-t}}} + \frac{\underline{\sigma\sqrt{T-t}}}{2},\ d2 = d1 - \underline{\sigma\sqrt{T-t}}$$

各記号は以下のとおりです。

- C　：コール・オプション・プレミアム
- P　：プット・オプション・プレミアム
- F　：先物価格
- K　：行使価格
- $T-t$ ：1 年を 1 としたオプション満期までの期間（例えば 3 ヶ月なら 0.25 です）
- r　：満期までの安全な金利（連続で複利計算する場合の金利）
- e　：ネピアの数（2.718…）。連続複利の計算をする時に使います。
- $\mathrm{N}(\bullet)$ ：**標準正規分布**の分布関数で特に $\mathrm{N}(d2)$ は「満期時点の日経平均が行使価格 K より大きくなる確率」を計算しています。
- σ　：ボラティリティ

σ （シグマ）がボラティリティで、太い下線の部分がボラティリティに関わる項なのですが、オプション価格の計算式では、ボラティリティは年率で表されるため、ボラティリティに残存期間 $(T-t)$ の平方根 $\sqrt{T-t}$ を掛けたものがログ・リターンの標準偏差になっています。わかりやすくいえば、$\sigma\sqrt{T-t}$ によって満期時点の変動の大きさを予測しています。ですから、残存期間が短いオプションのボラティリティの方が25.6と高くなっていても $\sqrt{T-t}$ を掛けてしまうと常に残存期間の長いオプションの方が変動は大きくなります。

これは、感覚的に考えても当たり前のことです。15 日後と 43 日後の日経平均先物価格を普通に想